24/10/16

Διαφορικές

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ $M,N \in C'(\Omega)$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ συνεκτικό

$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy = 0$

$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ τότε $\exists f$ με $df = 0$

Άσκηση 1i σελ. 47

$(x + y\cos x)dx + \sin x\, dy = 0$

$\downarrow M(x,y)$ $\uparrow N(x,y)$

$\left.\begin{array}{l} \frac{dM}{dy} = \frac{d(x+y\cos x)}{dy} = \cos x \\ \frac{dN}{dy} = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \end{array}\right\} \exists f$ με $df = 0$

$\frac{df}{dx} = M$ οπότε για την εύρεση της f ολοκληρώνω

$f(x,y) = \int (x + y\cos x)dx + h(y) = \frac{x^2}{2} + y\sin x + h(y)$

Άρα $\frac{df}{dy} = N = \left(\frac{x^2}{2} + y\sin x + h'(y)\right) = N \Rightarrow \dots \Rightarrow h(y) = c$

$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + y\sin x$ οι λύσεις της $f(x,y) = c$

Άσκηση 1ii σελ 46

$(ye^x + 2x\cos y)dx + (e^x - x^2\sin y)dy = 0$

$\uparrow M(x,y)$ $\uparrow N(x,y)$

$\left.\begin{array}{l} \frac{dM}{dy} = e^x - 2x\sin y \\ \frac{dN}{dx} = e^x - 2x\sin y \end{array}\right\} \frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$

$$f(x,y)=\int M(x,y)\,dx+h(y)$$
$$=\int ye^{x}+2x\cos y\,dx+h(y)$$

$$f(x,y)=ye^{x}+x^2\cos y+h(y)$$

$$\frac{df}{dy}=N(x,y)\Rightarrow e^{x}-\cancel{x^2\sin y}+h'(y)=e^{x}-\cancel{x^2\sin y}$$
$$\Rightarrow h'(y)=0\Rightarrow h(y)=c$$

$$f(x,y)=ye^{x}+x^2\cos y+c$$

Άρα $f(x,y)=c\Rightarrow ye^{x}+x^2\cos y=c$

- Αν $\frac{dM}{dy}\neq\frac{dN}{dx}$ πολλαπλασιάζουμε με έναν ολοκληρωτικό παράγοντα $p(x,y)$

Αναζητούμε $p(x,y)\underbrace{M(x,y)}_{M_1}dx+p(x,y)\underbrace{N(x,y)}_{N_1}dy=0$

$$\frac{dM_1}{dy}=\frac{dN_1}{dx}$$

Περιπτώσεις:

1) Αν $\dfrac{\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}}{N}=p(x)\Rightarrow p(x)=e^{\int p(x)dx}$ δεν έχει y

2) $\dfrac{\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy}}{M}=Q(y)\Rightarrow p(y)=e^{\int Q(y)dy}$ δεν έχει x

Παραδειγμα 1

$$\underbrace{\left(\frac{y^2}{2}+2ye^x\right)}_{M}dx+\underbrace{(y+e^x)}_{N}dy=0$$

$$\frac{dM}{dy}=y+2e^x \qquad \left.\frac{dN}{dx}=e^x\right\} \quad \frac{dM}{dy}\neq\frac{dN}{dx}$$

$$\frac{\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}}{N}=\frac{y+2e^x-e^x}{y+e^x}=1$$ συναρτηση του x

αρα $p(x)=e^{\int dx} \to p(x)=e^x$ ολο. παραγοντας

Η εξισωση γραφεται $\underbrace{e^x\left(\frac{y^2}{2}+2ye^x\right)}_{M_1}dx+\underbrace{e^x(y+e^x)}_{N_1}dy=0$

$$\frac{dM_1}{dy}=e^xy+2e^{2x} \qquad \frac{dN_1}{dx}=e^xy+2e^{2x}$$ ιδια

$$f(x,y)=\int(e^xy+e^{2x})dy+h(x)=y^2/2\cdot e^x+ye^{2x}+h(x)$$

Πρεπει $\frac{df}{dx}=M_1 \Rightarrow \frac{y^2}{2}e^x+2ye^{2x}+h'(x)$

$$\frac{y^2}{2}e^x+2ye^{2x}=e^x\frac{y^2}{2}+2ye^{2x}+h'(y)$$

$$h'(y)=0 \Rightarrow h(y)=c$$

$$\frac{y^2}{2}e^x+ye^{2x}=c$$

και βρισκουμε τις λυσεις.

Άσκηση 8.1
σελ 48

$$(ye^{xy}+2x)dx+(xe^{xy}-2y)dy=0 \quad , y(0)=2$$

$$\frac{dM}{dy}=\frac{d}{dy}(ye^{xy}+2x)=e^{xy}+yxe^{xy}$$

$$\frac{dN}{dx}=\frac{d}{dx}(xe^{xy}-2y)=e^{xy}+yxe^{xy}.$$

$$f(x,y)=\int M(x,y)dx+h(y)$$
$$=\int ye^{xy}dx+h(y)=\frac{ye^{xy}}{y}+x^2+h(y)$$

Θα πρέπει $\frac{df}{dy}=N$ δηλαδή $\quad xe^{xy}+h'(y)=xe^{xy}-2y$

$$h'(y)=-2y$$
$$h(y)=-y^2$$

$$\rightsquigarrow e^{xy}+x^2-y^2=c \quad \boxed{y(0)=2}$$
$$\Rightarrow \boxed{c=-3}$$
$$y^2=e^{xy}+x^2+3$$

Άσκηση 6!

$$(4x^{-4}y^2-2x^{-2}y)dx+(3x^{-3}y+x^{-1})dy=0$$
$$\rho(x,y)=x^my^n \quad (m,n, \text{ ακέραιοι}$$

Η εξίσωση γράφεται: $(\overset{M_1}{4x^{m-4}y^{n+2}-2x^{m-2}y^{n+1}})dx+(\overset{N_1}{3x^{m-3}y^{n+1}\ x^{m-1}y^n})dy=0$

Θα πρέπει $\frac{dM_1}{dy}=\frac{dN_1}{dx}$

Έχουμε: $\frac{dM_1}{dy}=4x^{m-4}(n+2)y^{n+1}-2x^{m-2}(n+1)y^n$

$$\frac{dN_1}{dx}=3(m-3)x^{m-4}y^{n+1}+(m-1)x^{m-2}y^n$$

1

άρα αρκεί

$$4(n+2) = 3(m-3)$$
$$-2(n+1) = m-1$$
$\Rightarrow$ λύνω σύστημα και βρίσκω m, n

$\rightarrow$ $y'' = F(x, y')$ $\qquad z = y'$

$$z' = f(x, z)$$

Άσκηση 1

σελ 52

$$xy'' = y' + x^2$$

Θέτω $z = y'$

$z' = y''$

$$xz' = z + x^2$$
$$xz' - z = x^2$$
$$z' - \frac{1}{x}z = x$$
$$z(x) = e^{-\int(-\frac{1}{x})dx}\left[c + \int x e^{\int -\frac{1}{x}dx} dx\right]$$
$$z(x) = e^{\ln x}\left(c + \int x e^{-\ln x}\right)dx$$
$$z(x) = x\left(c + \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx\right]$$
$$z(x) = \cancel{x\left(c + \frac{x^2}{2}\right)} \qquad x(c + x^2)$$

$$y'(x) = cx + x^2$$
$$y(x) = c\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + c_1$$

$\rightarrow$ $y'' = F(y, y')$ $\rightsquigarrow$ $y' = z$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$
$$y'' = z \cdot \frac{dz}{dy}$$

$\rightarrow$ $z \cdot \frac{dz}{dy} = F(y, z)$

παράδειγμα 1 σελ 60

$$2yy' = 1 + (y')^2$$

Θέτω $y' = z$ είναι $y'' = z\dfrac{dz}{dy}$

Η εξίσωση γράφεται

$$\frac{2z}{1+z^2}\,dz = \frac{dy}{y}$$

$$\ln(1+z^2) = \ln|y| + c_1 \Rightarrow$$

$$\cancel{1+z^2 = c_1}$$

$$e^{\ln(1+z^2)} = e^{\ln y + c_1}$$

$$z^2 = c_1|y| - 1$$

$$z = \pm\sqrt{c_1 y - 1}$$

Άσκηση 2iv σελ 62

$$y'' = 2yy' \quad // \; y = c$$

Θέτω $z = y' \Rightarrow z\dfrac{dz}{dy} = 2yz \Rightarrow dz = 2y\,dy$

$$z = y^2 + c$$

$$y'' = y^2 + c$$

$$\frac{dy}{y^2+c} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2+c} = x + c_1$$

ανάλογα με την τιμή του c

παίρνω περιπτώσεις για το ολοκλ.

1) $c = 0$

2) $c > 0$

3) $c < 0$